

СОДЕРЖАНИЕ:

Введение.....	4
План практических занятий, I семестр.....	6
Список дополнительных задач, I семестр.....	9
Список теоретических задач, I семестр.....	11
Контрольная работа №1. Вещественные числа. Предел последовательности.....	14
Контрольная работа №2. Предел и непрерывность функции.....	15
Контрольная работа №3. Дифференцирование функций.....	15
Равномерная непрерывность. Формула Тейлора.....	16
Контрольная работа №4. Неопределённый интеграл.....	18
Зачётная работа, I семестр.....	19
Список определений и формулировок теорем, I семестр.....	21
Вопросы к экзамену, I семестр	25
План практических занятий, II семестр.....	27
Список дополнительных задач, II семестр.....	32
Список теоретических задач, II семестр.....	34
КДЗ №1. Исследование функции и построение её графика.	
Наибольшее и наименьшее значения функции на множестве.....	36
КДЗ №2. Приложения определённого интеграла.....	37
Контрольная работа №1. Несобственные интегралы.....	37
Контрольная работа №2. Функции нескольких переменных.....	38
Контрольная работа №3. Функции нескольких переменных.....	39
Контрольная работа №4. Функции нескольких переменных.....	39
Зачётная работа, II семестр.....	41
Список определений и формулировок теорем, II семестр.....	43
Вопросы к экзамену, II семестр.....	46
Литература.....	47

ВВЕДЕНИЕ.

Данная методическая разработка содержит примерный *план практических занятий с указанием основных тем*, соответствующий курсу лекций по математическому анализу, читаемому в первом и втором семестрах на факультете Вычислительной Математики и Кибернетики (ВМК). В описании каждого занятия указаны номера задач, которые рекомендуется разобрать на занятии, отдельно выделены задачи для

домашнего задания и в некоторых занятиях предложен ещё список дополнительных задач, которые, по усмотрению преподавателя, можно предложить на занятии или добавить в домашнее задание. **Номера задач** даются по задачнику Б.П. Демидовича издания 2005 года. В случаях несоответствия номеров в указанном новом издании и в старом издании 1990 года **номера по старому изданию** указаны рядом в фигурных скобках. (Например, запись: 424(a) {424.1} – в 11-ом занятии ниже означает, что задача номер 424(a) по новому изданию имеет в старом издании номер 424.1). **Задачи с номерами, подчёркнутыми снизу**, взяты из предлагаемых ниже **списков дополнительных задач** отдельно для первого и второго семестров.

Кроме того, мы предлагаем дополнительно **списки теоретических задач** для каждого семестра, которые можно использовать для самостоятельных работ, для письменных коллоквиумов или для разбора на занятиях, на усмотрение преподавателя.

В первом семестре предлагается провести **4-5 контрольных работ**, для которых в разработке выделено 4 занятия. На усмотрение преподавателя, каждая из этих контрольных работ может быть проведена в течение половины занятия, вторая половина которого может быть использована для разбора нового материала. Такой вариант представляется даже более желательным. Мы выделили целое занятие для каждой контрольной работы, чтобы оставить преподавателю «поле для манёвра». После списков дополнительных задач и теоретических задач в разработке предлагаются **образцы вариантов 4 контрольных работ** (причём одну из них, №3, рекомендуется разбить на 2 отдельных контрольных работы).

Во втором семестре рекомендуется дать студентам **2 контрольных домашних задания** по темам: КДЗ№1 - «Исследование функции и построение её графика», КДЗ№2 – «Приложения определённого интеграла» (с индивидуальными вариантами по количеству студентов в группе и сроком исполнения в 1-2 недели), а также **4 контрольных работы** по всем другим темам. На каждую контрольную работу 2 семестра в разработке также выделено отдельное занятие. **Варианты контрольных**

домашних заданий и всех контрольных работ прилагаются после списков дополнительных задач и теоретических задач.

Традиционно в первом семестре (а иногда, по желанию студентов, и во втором семестре) примерно в середине семестра проводится *коллоквиум*. Он может проводиться как во время занятия (в письменном виде или устно при участии группы преподавателей), так и в дополнительное время – одним ведущим преподавателем в устной форме. Устный вариант коллоквиума, конечно, более желателен, особенно в первом семестре, в силу преимущества личного общения студентов с преподавателем. В данной разработке мы выделили отдельные занятия для проведения коллоквиумов, как в первом, так и во втором семестре. Для подготовки к коллоквиумам предлагаются: *список вопросов к экзамену* и *список определений и формулировок к зачёту и экзамену* - отдельно для каждого семестра. Из этих списков ведущий преподаватель может выделить часть вопросов и часть формулировок, охватывающих материал, который выносится на коллоквиум.

В конце каждого семестра проводится *зачёт*. В данной разработке предложены *варианты зачётных работ* для первого и для второго семестра. По усмотрению преподавателя, в варианты зачётных работ рекомендуется включить *несколько определений и формулировок* из прилагаемых списков для лучшего контроля усвоения студентами материала семестра.

Надеемся, что данная методическая разработка окажется полезной как преподавателям для ведения практических занятий, так и студентам для ознакомления со структурой курса и более качественной подготовки к контрольным работам, зачётам и экзаменам.

ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ. I СЕМЕСТР.

Тема 1. Теория вещественных чисел.

1 занятие. Вводное. Метод математической индукции. Бином Ньютона. Доказательство равенств и неравенств.

№№ 1, 2, 1, 2, 6.

Домашнее задание: 7, 8, 9, 10 {10.1}.

2 занятие. Вещественные числа, их свойства. Операции над вещественными числами.

№№ 31, 3, 4, 5.

Домашнее задание: 15, 16, 34.

Дополнительно: №№ 32, 6, 7, 8, 9.

3 занятие. Ограниченные и неограниченные, счётные и несчётные числовые множества. Точные верхние и нижние грани.

№№ 17, 18(a), 19(a), 20(a), 21(a), 28, 29.

Домашнее задание: 18(б), 19(б), 20(б), 21(б), 30.

Дополнительно: №№ 10, 11, 12, 13.

Тема 2. Предел числовой последовательности.

4 занятие. Понятие последовательности. Ограниченные, неограниченные, бесконечно малые, бесконечно большие последовательности.

№№ 42(a, в), 43(a, б), 41, 44, 45, 47, 49, 51, 53.

Домашнее задание: 42(б, г), 43(в), 46, 48, 50, 52, 55, 56, 57.

5 занятие. Предел последовательности.

№№ 58, 59, 60, 62, 64.

Домашнее задание: 61, 63, 65, 66, 67, 68, 91.

6 занятие. Монотонная последовательность и её предел.

№№ 69, 72, 74, 75(a), 77, 80, 81, 96, 99.

Домашнее задание: 70, 73, 75(б), 76, 79, 90, 97, 98, 100.

Дополнительно: 14, 15.

7 занятие. Критерий Коши существования предела последовательности.

№№ 82, 84, 88, 92.

Домашнее задание: 83, 85, 86, 94.

Дополнительно: 16, 17, 18, 19, 20.

8 занятие. Предельные точки последовательности и множества. Верхние и нижние пределы последовательности.

№№ 101(a, б){101,101.1}, 103, 106, 116, 121, 122, 128, 129.

Домашнее задание: 102, 104, 105, 108, 111, 114, 117, 123, 127, 130.

9 занятие. Вычисление пределов последовательностей.

№№ 131(а), 132(а), 133(а), 135, 136, 138, 140.

Домашнее задание: 131(б), 132(б), 133(б), 134, 137, 139, 141, 142, 143, 144.

10 занятие. Контрольная работа №1.

Вещественные числа. Пределы последовательности.

Тема 3. Функция одной переменной. Предел и непрерывность функции.

11 занятие. Функция одной переменной. Предел функции. Условия его существования.

№№ 381, 383, 386, 388, 397, 401, 409, 411, 413, 424(а){424}.

Домашнее задание: 382, 384, 385, 387, 389, 399, 403-407, 408, 424(б){424.1}.

12 занятие. Вычисление пределов функций.

№№ 435, 444, 452, 458, 463, 471, 478, 483, 493, 505, 509, 513, 519(а){519}.

Домашнее задание: 410, 436, 439, 448, 453, 455.1, 460, 469, 472, 482, 489, 495, 496, 499, 506, 519(б){519.1}.

13 занятие. Продолжение вычисления пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Асимптотическое сравнение функций. О – символика.

№№ 529, 534, 541, 543, 553, 561, 564, 646, 647, 648, 650(г), 651(д), 655(в, г, д), 658(б, г, д).

Домашнее задание: 507, 510, 523, 528, 538, 542, 552, 556, 558, 560, 563, 565, 652, 653, 656, 659, 660, 661.

14 занятие. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.

№№ 666, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 680, 683, 686.

Домашнее задание: 674, 681, 682, 694, 698, 707, 708, 720, 724, 726.

15 занятие. Свойства непрерывных функций.

№№ 734, 735, 736, 741, 742, 743, 744, 748, 751, 752.

Домашнее задание: 740, 745, 746, 749, 757, 758.

16 занятие. Контрольная работа №2.

Предел и непрерывность функции.

17 занятие. Коллоквиум.

Вещественные числа. Предел последовательности. Предел и непрерывность функции.

Тема 4. Дифференцирование функции одной переменной.

18 занятие. Производная и дифференциал. Основные правила вычисления.

№№ 833, 991, 994, 997, 998, 1016, 1071, 1075, 1081.

Домашнее задание: 992, 1009(1,2){1009,1009.1}, 1012, 1014, 1015, 1019, 1020, 1076, 1082.

19 занятие. Производные функций, заданных параметрически, обратных и сложных функций.

№№ 762, 763, 764, 765, 781, 1077, 1079.

Домашнее задание: 760, 761, 1078, 1080, 1081, 1082.

20 занятие. Производные и дифференциалы высших порядков.

№№ 1130, 1136, 1143, 1161, 1173, 1197, 1211.

Домашнее задание: 1133, 1142, 1165, 1175, 1198, 1212, 1226, 1227.

21 занятие. Основные свойства дифференцируемых функций.

№№ 1237, 1244, 1251(б), 1254, 1258, 1262, 1264(а), 1286, 1287.

Домашнее задание: 1236, 1246(г), 1250, 1251(а, в), 1255, 1263.

22 занятие. Равномерная непрерывность функции.

№№ 787, 788, 792, 794, 795, 806(2){806.1}.

Домашнее задание: 789, 793, 796, 800, 801, 802(а, б, г, е), 806(1){806(н)}.

23 занятие. Правила Лопиталя раскрытия неопределённостей.

№№ 1322, 1330, 1336, 1341, 1351, 1356, 1363(б){1363.2}, 1374(б, г).

Домашнее задание: 1374(а, в), 1363(г){1363.3}, 1368, 1368.1, 1359, 1354, 1343, 1348, 1373.2 {1373.1}.

24 занятие. Формула Тейлора.

№№ 1377, 1381, 1385, 1393, 1396(д), 1394(б), 1402, 1406(б){1406.1}.

Домашнее задание: 1379, 1382, 1387, 1392, 1394(а, в), 1396(а), 1398, 1404, 1408.

25 занятие. Контрольная работа №3.

Свойства дифференцируемых функций одной переменной.

Тема 5. Неопределённый интеграл.

26 занятие. Неопределённый интеграл. Основные правила его вычисления.

№№ 1646, 1652, 1668, 1683, 1720, 1725, 1745, 1767, 1782, 1794, 1836.

Домашнее задание: 1638, 1643, 1648, 1650, 1663, 1682, 1688, 1698, 1703, 1711, 1719, 1726, 1781, 1805, 1843.

27 занятие. Интегрирование рациональных функций.

№№ 1867, 1881, 1891, 1908, 1913.

Домашнее задание: 1870, 1877, 1886, 1882, 1892, 1903, 1909.

28 занятие. Интегрирование иррациональных выражений.

№№ 1926, 1931, 1937, 1943, 1952, 1964, 1967, 1981.

Домашнее задание: 1927, 1932, 1938, 1947, 1953, 1966, 1986.

29 занятие. Интегрирование тригонометрических выражений.

№№ 1991, 1999, 2013, 2019, 2025, 2029, 2038, 2041, 2042, 2166, 2171.

Домашнее задание: 1992, 2000, 2009, 2017, 2020, 2028, 2034, 2040, 2043, 2082, 2168, 2174.

30 занятие. Контрольная работа №4.

Неопределённый интеграл.

СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ. I СЕМЕСТР.

1. Доказать формулу бинома Ньютона: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$.

2. Доказать неравенство: $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

3. Доказать неравенство: $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$.

4. Доказать неравенство (см. задачу №8 из Демидовича):

$$n^{\frac{n}{2}} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n > 1).$$

5. Доказать, что если все $x_i > 0$ и $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$, то $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$.

6. Доказать неравенства ($x_i > 0$):

а) $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$; б) $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$.

7. Доказать неравенство: $2^n > n^3$, $n \geq 10$.

8. Доказать, что если все $x_i > 0$ и $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$, то $(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \dots \cdot (1+x_n) \geq 2^n$.

9. Доказать неравенство Коши-Буняковского: $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$.
10. Пусть $\{x\} \subseteq \{y\}$. Доказать, что: а) $\sup\{x\} \leq \sup\{y\}$; б) $\inf\{x\} \geq \inf\{y\}$.
11. Пусть $A = \{x\} \cup \{y\}$ (объединение) и $B = \{x\} \cap \{y\}$ (пересечение).
Доказать, что:
а) $\sup A = \max(\sup\{x\}, \sup\{y\})$; б) $\inf A = \min(\inf\{x\}, \inf\{y\})$;
с) $\sup B \leq \min(\sup\{x\}, \sup\{y\})$; д) $\inf B \geq \max(\inf\{x\}, \inf\{y\})$.
12. Показать, что множество вещественных чисел $X = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{7}\right\}$ не имеет наибольшего элемента. Указать точную нижнюю грань этого множества.
13. Показать, что множество рациональных чисел $B = \left\{b \in \mathbb{Q} \mid b^2 > 3\right\}$ не имеет наименьшего элемента.
14. Доказать сходимость последовательности $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}$, где $a > 0$, и общее число извлекаемых корней равно n . Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.
15. Для приближённого нахождения корня квадратного из числа $a > 0$ рассмотреть последовательность, заданную рекуррентной формулой: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, где x_1 - любое положительное число. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$.
16. Доказать, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha \geq 2$ и расходится при $\alpha \leq 1$.
17. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \dots + \frac{1}{\ln n}$ расходится.
18. Доказать, что если $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$, и $a_n \geq 0$, то последовательность $x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $y_n = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^n a_{2^n}$.
19. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{1}{2 \ln^p 2} + \dots + \frac{1}{n \ln^p n}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.
20. Пользуясь задачей №18, доказать, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$.
-
-

СПИСОК ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. I СЕМЕСТР.

1. Какова мощность множества всех квадратов на плоскости с рациональными координатами вершин?
2. Доказать, что множество непересекающихся интервалов на прямой не более чем счетно.
3. Построить взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на интервал $(0, 1)$.
4. Построить взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на полупрямую $[0, +\infty)$.
5. Построить взаимно однозначное отображение $[0, +\infty)$ на интервал (a, b) .
6. Доказать равномощность отрезка $[0, 1]$ и квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$.
7. Доказать, что всякое несчетное множество содержит несчетное ограниченное подмножество.
8. Известно, что множество предельных точек множества A счетно. Доказать, что множество A счетно.

Указание: доказать, что любое числовое множество мощности континуума содержит, по крайней мере, одну предельную точку. Рассмотреть множество A' , полученное из множества A удалением всех его предельных точек.

9. Доказать, что, если некоторая подпоследовательность монотонной последовательности ограничена, то и сама последовательность ограничена.
10. Дана последовательность a_n , у которой все подпоследовательности $a_{2^i}, a_{3 \cdot 2^i}, a_{5 \cdot 2^i}, \dots, i=1, 2, \dots$ сходятся к одному и тому же числу b . Что можно сказать о сходимости последовательности a_n ?
11. Привести примеры последовательности a_n , удовлетворяющей соотношениям:
 а) $\inf\{a_n\} < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, б) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n\}$, в) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n\}$, г) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n < \sup\{a_n\}$.
12. Последовательность a_n называется последовательностью с ограниченным изменением, если существует число C такое, что $\forall n \in N \sum_{k=1}^n |a_{k+1} - a_k| \leq C$. Доказать, что последовательность с ограниченным изменением сходится.
13. Последовательность a_n называется последовательностью с ограниченным изменением, если существует число C такое, что $\forall n \in N \sum_{k=1}^n |a_{k+1} - a_k| \leq C$. Привести пример сходящейся последовательности с неограниченным изменением.
14. Пусть A - любое множество из области определения функции $f(x)$. Как соотносятся множества A и $f^{-1}(f(A))$?

15. Пусть A и B - любые множества из области определения функции $f(x)$. Как соотносятся множества $f(A \cup B)$ и $f(A) \cup f(B)$? Множества $f(A \cap B)$ и $f(A) \cap f(B)$?
16. Пусть функция f отображает отрезок $[0, 1]$ на множество $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$. Доказать, что, по крайней мере, для одного из чисел c_i множество $f^{-1}(c_i)$ имеет предельную точку.
17. Функция f определена на всей числовой прямой и ее график симметричен относительно точки $(0, 0)$ и прямой $x = C$ ($C \neq 0$). Доказать, что функция f периодическая.
18. Привести пример функции, определенной на отрезке $[0, 1]$, но неограниченной на любом отрезке $[a, b] \subset [0, 1]$.
19. Привести пример функции, определенной на отрезке $[-1, 1]$, монотонно возрастающей в точке 0 и не являющейся монотонной на отрезке $[-\delta, \delta]$ для любого $\delta > 0$.
20. Привести пример функций $f(x)$ и $g(y)$, таких, что $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$, но не существует $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$.

Указание: Взять в качестве $g(y)$ функцию, разрывную в точке 0, например

$$g(y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ 1, & y \neq 0 \end{cases}.$$

21. Привести пример функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0, 1]$, принимающей на любом отрезке $[a, b] \subset [0, 1]$ все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, но не являющейся непрерывной на $[0, 1]$.
22. Привести пример монотонной на $[0, 1]$ функции с бесконечным числом точек разрыва.
23. Существует ли функция, непрерывная на отрезке $[0, 1]$, взаимно однозначно отображающая $[0, 1]$ на множество: а) $(0, +\infty)$; б) $(0, 1)$; в) $[1, 3]$; г) $[0, 1] \cup [2, 3]$? (Если нет, то почему; если да, то привести пример).
24. Существует ли функция, определенная и непрерывная на интервале $(0, 1)$, множеством значений которой является множество: а) $(0, +\infty)$; б) $(0, 10)$; в) $[0, 1]$; г) $(0, 1) \cup (2, 3)$? (Если нет, то почему; если да, то привести пример).
25. Доказать, что функция, равномерно непрерывная на каждом из двух отрезков, равномерно непрерывна на их объединении. Привести пример, показывающий, что для интервалов это утверждение неверно.
26. Доказать, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда существует непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $g(x)$, совпадающая с функцией $f(x)$ на интервале (a, b) .
27. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой оси и является четной (нечетной) функцией. Доказать, что $f'(x)$ является нечетной (четной).

28. Пусть $f(x) = |x|^3$. Найти $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(0)$.
29. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и существует постоянная $C > 0$, такая, что $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^2 \quad \forall x, y \in [a, b]$. Доказать, что функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$.
30. Пусть $P(x)$ - многочлен степени n , имеющий n вещественных корней. Доказать, что все корни многочлена $P'(x)$ вещественны.
31. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x}, & x > 0 \end{cases}$. Доказать, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема на всей числовой оси (т.е. для любого натурального числа n и для любой точки $x \in \mathbf{R}$ существует $f^{(n)}(x)$). Построить график функции $f(x)$.
32. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1 \end{cases}$. Доказать, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема на всей числовой оси. Построить график функции $f(x)$.
33. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на отрезке $[-1, 1]$, $f^{(n)}(0) = 0$ для любого натурального n и существует постоянная $C > 0$, такая, что $\sup_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n)}(x)| \leq C^n \cdot n!$, $n = 1, 2, \dots$. Доказать, что $f(x) \equiv 0$ на $[-1, 1]$.
34. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Найти $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(n+1)}(0)$.
35. Пусть $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ - многочлен Тейлора - Маклорена функции e^x .
- А) Найти $\sup_{0 \leq x \leq 1} |e^x - P_{10}(x)|$;
- Б) Найти число $h > 0$ такое, что $\sup_{0 \leq x \leq h} |e^x - P_{10}(x)| \leq 10^{-7}$;
- В) Найти натуральное число n такое, что $\sup_{0 \leq x \leq 1} |e^x - P_n(x)| \leq 10^{-7}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1.
ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

Вариант №1

1. Найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$: $x_n = \sin^2 \frac{\pi n}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;
2. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{e+a}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = 0$, $(a > 0)$;
3. Пользуясь критерием Коши, исследовать на сходимость:
 $x_n = 1 + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha}$, $\alpha < 1$;
4. Доказать, что $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Вариант № 2

1. Найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$: $x_n = \cos^2 \frac{\pi n}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$;
2. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e-a}{n}\right)^n \cdot n! = 0$, $(0 < a < e)$;
3. Пользуясь критерием Коши, исследовать на сходимость:
 $x_n = 1 + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{5^q} + \dots + \frac{1}{(3n-1)^q}$, $q \geq 2$;
4. Доказать, что $\frac{n^k}{a^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $(a > 1)$.

Вариант № 3.

1. Найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$: $x_n = \cos^2 \frac{2\pi n}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}$;
2. Доказать: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^2 - \beta}{n^2}\right)^n \cdot (n!)^2 = 0$, $(0 < \beta < e^2)$;
3. Пользуясь критерием Коши, исследовать на сходимость:
 $x_n = 1 + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha}$, $\alpha \geq 2$;
4. Доказать, что $\frac{a^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $(a > 0)$.

Вариант №4.

1. Найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$: $x_n = \sin^2 \frac{2\pi n}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$;
2. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{e^2 + \gamma} \right)^n \cdot \frac{1}{(n!)^2} = 0$, $(\gamma > 0)$;
3. Пользуясь критерием Коши, исследовать на сходимость:
 $x_n = 1 + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{5^q} + \dots + \frac{1}{(3n-1)^q}$, $q < 1$;
4. Доказать, что $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$, $(a > 0)$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2.

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ.

Вариант № 1

1. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{1 - \cos x}$;
2. Выделить у данной функции $f(x) = e^{x-2\sqrt{x}} - e^{-1}$ главный член вида: $c(x-1)^n$.
3. Определить характер точек разрыва следующей функции
 $f(x) = [x] \sin \pi x + e^{\frac{x+1}{x}}$.
4. Исследовать на непрерывность следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x - \text{рационально}, \\ \sqrt{3}, & x - \text{иррационально}. \end{cases}$$

Вариант № 2

1. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 + \sqrt{\operatorname{tg} 2x})}{e^{3\sqrt{x}} - 1}$;
2. Выделить у данной функции $f(x) = e^{x^2 - \frac{4}{3x}} - e^{-\frac{1}{3}}$ главный член вида: $c(x-1)^n$.
3. Определить характер точек разрыва следующей функции
 $f(x) = [x] \cos \frac{\pi(2x+1)}{2} + e^{x - \frac{1}{x}}$.
4. Исследовать на непрерывность следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x - \text{рационально}, \\ \frac{1}{2}, & x - \text{иррационально}. \end{cases}$$

Вариант № 3

1. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$;
2. Выделить у данной функции $f(x) = e^{x^2 - \frac{1}{2x}} - e^{\frac{1}{2}}$ главный член вида: $c(x-1)^n$.

3. Определить характер точек разрыва следующей функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3} + \left(1 - e^{\frac{x}{1-x}}\right)^{-1}.$$

4. Исследовать на непрерывность следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, & x - \text{рационально}, \\ 1, & x - \text{иррационально}. \end{cases}$$

Вариант № 4

1. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{2^{x^2+2x} - 1}{1 - \cos \frac{5x}{2}};$

2. Выделить у данной функции $f(x) = e^{2x-3\sqrt{x}} - e^{-1}$ главный член вида: $c(x-1)^n$.

3. Определить характер точек разрыва следующей функции

$$f(x) = \operatorname{arccctg} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1+x}}}.$$

4. Исследовать на непрерывность следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x - \text{рационально}, \\ -\frac{1}{2}, & x - \text{иррационально}. \end{cases}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ.

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА.

Вариант № 1

1. Найти $d^2 y$, если $y = \frac{\ln x}{x} \cdot \sin x$;

2. Найти $y^{(20)}$, если $y = x^3 \cdot e^{2x}$;

3. Найти y''_{xx} , если $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$.

4. Исследовать функцию на равномерную непрерывность в указанном промежутке:

$$f(x) = e^x \cos \frac{1}{x\sqrt{x}}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

5. Разложить данную функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности указанной точки x_0 до членов III порядка включительно:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1.$$

6. Найти предел, пользуясь формулой Тейлора: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - 2x^3\sqrt{3-x^2}}{x^5}.$

7. Вычислить приближённо с точностью до 10^{-4} следующую величину: $\sqrt[3]{29}$.

8. Раскрыть неопределённость: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$

Вариант №2

1. Найти d^2y , если $y = x^{x^2}$;
2. Найти $y^{(50)}$, если $y = x^3 \cdot \sin 3x$;
3. Найти y''_{xx} , если $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$.

Эту контрольную работу можно, разбив на 2 части, провести на 2 занятиях – по одному часу

4. Исследовать функцию на равномерную непрерывность в указанном промежутке: $f(x) = (\ln x)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{x}$, $(2 \leq x < +\infty)$.
5. Разложить данную функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности указанной точки x_0 до членов III порядка включительно:
 $f(x) = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x_0 = 0$.
6. Найти предел, пользуясь формулой Тейлора: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\operatorname{tg} x}}{x \cdot \sin^2 x}$.
7. Вычислить приближённо с точностью до 10^{-4} следующую величину: $\ln(1,3)$.
8. Раскрыть неопределённость: $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

Вариант №3

1. Найти d^2y , если $y = \frac{\cos x}{x} \cdot \ln x$;
2. Найти $y^{(47)}$, если $y = x^3 \cdot \cos 4x$;
3. Найти y''_{xx} , если $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \frac{1}{2} t^2 \end{cases}$.
4. Исследовать функцию на равномерную непрерывность в указанном промежутке: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} \cdot \sin \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $(0 < x < +\infty)$.
5. Разложить данную функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности указанной точки x_0 до членов III порядка включительно:
 $f(x) = x^x - 1$, $x_0 = 1$.
6. Найти предел, пользуясь формулой Тейлора: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x^4 \ln(1 + \frac{1}{x^2}))$.
7. Вычислить приближённо с точностью до 10^{-4} следующую величину: $\sqrt[4]{17}$.
8. Раскрыть неопределённость: $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$.

Вариант №4

1. Найти d^2y , если $y = x^{\ln x}$;
2. Найти $y^{(6)}$, если $y = x^3 \cdot \ln x$;
3. Найти y''_{xx} , если $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{1-t} \end{cases}$.
4. Исследовать функцию на равномерную непрерывность в указанном промежутке: $f(x) = (\ln x)^{\frac{1}{3}} \sin \frac{1}{x}$, $(2 \leq x < +\infty)$.
5. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = \infty$ (т.е. по степеням $\frac{1}{x^n}$) до членов III порядка:
 $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$, $(x > 0)$
6. Найти предел, пользуясь формулой Тейлора: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(tgx) - x}{x^3}$.
7. Вычислить приближённо с точностью до 10^{-4} следующую величину: $\sin 20^\circ$.
8. Раскрыть неопределённость: $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4.

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Вариант №1

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$;
2. $\int (x \ln x)^3 dx$;
3. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x}$;
4. $\int \frac{2x+1}{3x-2} dx$.

1. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2e^{2x} - 3}}$;
2. $\int (x^3 \ln^2(1+x)) dx$;
3. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^4 x}$;
4. $\int \frac{1-2x}{4x-3} dx$.

Вариант №3

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int \frac{e^t dt}{(e^{2t} + 1)^{\frac{3}{2}}}$;
2. $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \cdot \frac{dx}{x}$;

Вариант №2

Вычислить следующие интегралы:

$$3. \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x};$$

$$4. \int \frac{2-3x}{2x-1} dx.$$

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{3-3e^{2x}}};$$

$$2. \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 dx;$$

$$3. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x};$$

$$4. \int \frac{3+2x}{1+3x} dx.$$

Вариант №4

Вычислить следующие интегралы:

ЗАЧЁТНАЯ РАБОТА.

I СЕМЕСТР.¹

Вариант № 1.

1. Исследовать на сходимость следующую числовую последовательность:

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{2n-1}}.$$

2. Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x}$.

3. Исследовать функцию на непрерывность и дифференцируемость:

$$f(x) = \ln(1+x^4) \cos \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0.$$

4. Найти du, d^2u , где $u = f(v)$, а функция $v(x)$ задана так: $v = \sqrt{1+x^2}$.

5. Найти f'_x, f''_{xx} , если $y = f(x)$, и x, y заданы следующим образом:

$$\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}.$$

6. Вычислить следующие неопределённые интегралы:

$$a) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}};$$

$$б) \int x \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx;$$

$$в) \int \arcsin x dx.$$

7. Вычислить главный член функции $f(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{|x|}}$ вида: $C(1-x)^n$ при $x \rightarrow 1$.

8. Исследовать функцию на равномерную непрерывность:

$$f(x) = (\ln x)^\alpha \cdot \sin \frac{1}{x}, \text{ на полупрямой } 2 \leq x < +\infty.$$

¹ По усмотрению преподавателя в варианты зачётной работы рекомендуется вставить по несколько формулировок и определений из прилагаемого ниже списка формулировок и определений для первого семестра.

9. Доказать функциональное неравенство: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, ($x > 0$).
10. Разложить по формуле Тейлора в окрестности указанной точки x_0 до членов III порядка следующую функцию: $f(x) = x^x - 1$, $x_0 = 1$.
11. Вычислить приближённо с указанной точностью следующую величину: $\sqrt{5}$ до 10^{-4} .
12. Пользуясь формулой Тейлора, найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Вариант № 2.

1. Исследовать на сходимость следующую числовую последовательность: $x_n = 1 + \frac{1}{3^{7/3}} + \frac{1}{5^{7/3}} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^{7/3}}$;
2. Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$.
3. Исследовать функцию на непрерывность и дифференцируемость: $f(x) = \arctg(x^5) \cdot \sin \frac{1}{x^2}$, $f(0) = 0$.
4. Найти du , d^2u , где $u = f(v)$, а функция $v(x)$ задана так: $v(x) = \sin(1+x^2)$.
5. Найти f'_x , f''_{xx} , если $y = f(x)$, и x, y заданы следующим образом:

$$r = \cos 2\varphi, \text{ при } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}.$$
6. Вычислить следующие неопределённые интегралы:
 - а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(1+x)}};$
 - б) $\int \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{1 + x - \sqrt{x^2 + x + 1}} dx;$
 - в) $\int x \arctg x dx.$
7. Вычислить главный член функции $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ вида: $\frac{C}{x^n}$ при $x \rightarrow \infty$.
8. Исследовать функцию на равномерную непрерывность:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \ln(1+x), \quad 0 < x < +\infty.$$
9. Доказать функциональное неравенство: $x - \frac{x^3}{2} < x \cos x < x$, ($0 < x < \pi$).
10. Разложить по формуле Тейлора в окрестности указанной точки до членов III порядка следующую функцию: $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}})$, $x \rightarrow \infty$.

11. Вычислить приближённо с указанной точностью следующую величину: $\cos 9^\circ$ до 10^{-5} .
12. Пользуясь формулой Тейлора, найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.
-

СПИСОК ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ФОРМУЛИРОВОК ТЕОРЕМ. I СЕМЕСТР.

1. Определение ограниченного (сверху, снизу) числового множества.
2. Определение - число M является (не является) точной верхней гранью множества X .
3. Определение - число M является (не является) точной нижней гранью множества X .
4. Определение предела числовой последовательности.
5. Определение ограниченной (неограниченной) последовательности.
6. Определение бесконечно малой (не бесконечно малой) числовой последовательности.
7. Определение бесконечно большой (не бесконечно большой) числовой последовательности.
8. Определение монотонной последовательности.
9. Теорема о монотонной и ограниченной последовательности.
10. Теорема Больцано-Вейрштрасса.
11. Определение: последовательность $\{x_n\}$ является (не является) фундаментальной.
12. Критерий Коши сходимости последовательности.
13. Определение функции на числовом множестве.
14. Определение ограниченной (не ограниченной) функции на множестве X .
15. Определение точной верхней грани функции на множестве X .
16. Определение точной нижней грани функции на множестве X .

17. Определение монотонной функции.
18. Определение: функция $f(x)$ удовлетворяет (не удовлетворяет) условию Коши при стремлении x к $a + 0$.
19. Определение: функция $f(x)$ удовлетворяет (не удовлетворяет) условию Коши при стремлении x к $a - 0$.
20. Определение: функция $f(x)$ удовлетворяет (не удовлетворяет) условию Коши при стремлении x к a .
21. Определение: функция $f(x)$ удовлетворяет (не удовлетворяет) условию Коши при стремлении x к $+\infty$.
22. Определение: функция $f(x)$ удовлетворяет (не удовлетворяет) условию Коши при стремлении x к $-\infty$.
23. Определение: функция $f(x)$ удовлетворяет (не удовлетворяет) условию Коши при стремлении x к ∞ .
24. Критерий Коши существования предельного значения функции в точке a .
25. Критерий Коши существования предельного значения функции в точке a справа (слева).
26. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.
27. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.
28. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$.
29. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$.
30. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$.
31. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$.
32. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.
33. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.
34. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.
35. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.
36. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.
37. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.
38. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.
39. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.
40. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$.
41. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$.
42. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$.
43. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$.

44. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.
45. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.
46. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
47. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
48. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
49. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
50. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
51. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
52. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
53. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
54. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b + 0$.
55. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b + 0$.
56. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b - 0$.
57. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b - 0$.
58. Определение по Гейне: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b + 0$.
59. Определение по Коши: существует (не существует) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b + 0$.
60. Определение: $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$, $x \rightarrow a$.
61. Определение: $\varphi(x) = \bar{o}(\psi(x))$, $x \rightarrow a$.
62. Определение: $\varphi(x) = \bar{o}(\psi(x))$, $x \rightarrow a - 0$.
63. Определение: $\varphi(x) = \bar{o}(\psi(x))$, $x \rightarrow a + 0$.
64. Определение: $\varphi(x) = O(\psi(x))$, $x \rightarrow a$.
65. Определение: $\varphi(x) \sim \psi(x)$, $x \rightarrow a$.
66. Определение: $\varphi(x) \sim \psi(x)$, $x \rightarrow a - 0$.
67. Определение: $\varphi(x) \sim \psi(x)$, $x \rightarrow a + 0$.
68. Определение функции, непрерывной в точке a .
69. Определение функции, непрерывной в точке a справа.
70. Определение функции, непрерывной в точке a слева.
71. Определение точки устранимого разрыва функции.
72. Определение точки разрыва функции I рода.
73. Определение точки разрыва функции II рода.
74. Теорема о непрерывности сложной функции.
75. Теорема о сохранении знака непрерывной функции.
76. Теорема о локальной ограниченности непрерывной функции.
77. Теорема о точках разрыва монотонной функции.

78. Критерий непрерывности монотонной функции.
79. Определение обратной функции.
80. Теорема о существовании обратной функции.
81. Теорема о прохождении непрерывной функции через ноль при смене знаков.
82. Первая теорема Вейерштрасса.
83. Вторая теорема Вейерштрасса.
84. Определение функции, равномерно непрерывной (не равномерно непрерывной) на множестве X .
85. Теорема Кантора.
86. Определение производной функции.
87. Геометрический смысл производной данной функции.
88. Определение дифференцируемой функции.
89. Определение дифференциала функции.
90. Теорема: инвариантность формы первого дифференциала.
91. Теорема о производной сложной функции.
92. Теорема о производной обратной функции.
93. Формула Лейбница для производной порядка n от произведения двух функций.
94. Определение возрастания (убывания) функции в точке.
95. Определение локального максимума (минимума) функции в точке.
96. Достаточное условие возрастания (убывания) функции в точке.
97. Необходимое условие локального экстремума функции в точке.
98. Теорема Ролля.
99. Теорема Лагранжа.
100. Теорема Коши (обобщенная формула конечных приращений).
101. Первое правило Лопиталья.
102. Второе правило Лопиталья.
103. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме.
104. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
105. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши.
106. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
107. Определение первообразной функции.
108. Определение неопределённого интеграла
109. Теорема об интегрировании по частям в неопределённом интеграле.
110. Теорема о замене переменной интегрирования в неопределённом интеграле.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ.

I СЕМЕСТР.

1. Вещественные числа и правила их сравнения. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у ограниченного сверху (снизу) множества вещественных чисел.
2. Приближение вещественного числа рациональным. Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.
3. Мощность множества. Счетные множества и множества мощности континуум. Неэквивалентность множества мощности континуум счетному множеству.
4. Последовательность вещественных чисел. Ограниченные и неограниченные последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Их основные свойства.
5. Понятие сходящейся последовательности. Основные теоремы о сходящихся последовательностях (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, арифметические операции над сходящимися последовательностями).
6. Предельный переход в неравенствах для последовательностей. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число e .
7. Понятие предельной точки последовательности. Теорема о существовании верхнего и нижнего пределов у ограниченной последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
8. Критерий Коши сходимости последовательности.
9. Понятие функции. Два определения предельного значения функции (по Гейне и по Коши), их эквивалентность. Критерий Коши существования предельного значения функции.
10. Арифметические операции над функциями, имеющими предельное значение. Бесконечно малые и бесконечно большие (в данной точке) функции и принципы их сравнения.
11. Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Арифметические операции над непрерывными функциями. Классификация точек разрыва.
12. Локальные свойства непрерывных функций (ограниченность, сохранение знака). Непрерывность сложной функции.
13. Обратная функция. Условия непрерывности монотонных функций и обратных функций.
14. Простейшие элементарные функции и их основные свойства.
15. Предельный переход в неравенствах для функций. Замечательные пределы.

16. Непрерывность функции на множестве. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение.
17. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса (о функциях, непрерывных на сегменте).
18. Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема Кантора.
19. Понятие производной и дифференцируемости функции в точке.
20. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций, сложной функции и обратной функции. Таблица производных.
21. Первый дифференциал функции. Инвариантность его формы. Использование дифференциала для приближенного вычисления значений функции.
22. Производные и дифференциалы высших порядков, формула Лейбница. Дифференцирование функции, заданной параметрически.
23. Возрастание (убывание) функции в точке. Локальный экстремум функции. Достаточное условие возрастания (убывания). Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой в данной точке функции.
24. Теорема Роля о нуле производной и ее геометрический смысл.
25. Теорема Лагранжа (формула конечных приращений). Следствия из неё.
26. Теорема Коши (обобщенная формула конечных приращений).
27. Правила Лопиталья раскрытия неопределённостей.
28. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (в форме Шлёмилля-Роша).
29. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Лагранжа, Коши и Пеано. Оценка остаточного члена.
30. Разложение по формуле Тейлора-Маклорена элементарных функций. Примеры приложений формулы Тейлора для приближенных вычислений элементарных функций и вычисления пределов.
31. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов от элементарных функций.
32. Основные методы интегрирования - замена переменной, интегрирование по частям.
33. Элементы теории многочленов. Интегрирование рациональных функций.
34. Интегрирование дробно-линейных и квадратичных иррациональностей и некоторых классов тригонометрических функций.

ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ. II СЕМЕСТР.

Тема 1. Исследование функции одной переменной и построение её графика.

1 занятие. Возрастание и убывание функции.

№№ 1272, 1278, 1280, 1287, 1288, 1289а, 1295, 1297а {1297(н)(а)}.

Домашнее задание: 1270, 1276, 1284, 1285, 1289(б, д), 1291.

2 занятие. Направление выпуклости. Точки перегиба графика функции.

№№ 1303, 1308, 1311, 1312, 1314.1(а) {1314(а)}, 1317.

Домашнее задание: 1306, 1309, 1313, 1314.2 {1314.1}, 1314.1(б, в) {1314(б, в)}, 1316.

3 занятие. Локальные экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения функции на множестве.

№№ 1420, 1425, 1427, 1432, 1444, 1447, 1453, 1458, 1462, 1557, 1561, 1565.

Домашнее задание: 1417, 1423, 1426 {1426(н)}, 1428, 1437, 1452, 1456.1 {1456},

1560, 1575, 1577, 1583.

4 занятие. Построение графиков функций (декартовы, полярные, параметрические координаты).

№№ 1471, 1477, 1483, 1491, 1508, 1512.

Выдача контрольного домашнего задания (КДЗ) №1.

Домашнее задание: 1490, 1500, 1505, 1507, 1513, 1522.

5 занятие. Продолжение темы «Построение графиков».

№№ 1516, 1532, 1536, 1541, 1546, 1548.

Домашнее задание: 1531, 1535, 1537, 1542, 1547, 1550.

Тема 2. Определённый интеграл.

6 занятие. Определённый интеграл. Основные понятия.

№№ 2181, 2185, 2187, 2191, 2193.1 {2193}, 2195, 2197, 2201.

Прием КДЗ №1.

Домашнее задание: 2182, 2186, 2196, 2193.2 {2193.1}, 2194, 2200, 2202, 2203, 2204.

7 занятие. Вычисление определённых интегралов.

№№ 2206, 2211, 2219, 2222, 2239, 2245, 2246, 2257, 2263, 2269, 2281, 2309, 2313.

Домашнее задание: 2213, 2218, 2223, 2242, 2243, 2249, 2274, 2279, 2286, 2310, 2311, 2315.

8 занятие. Оценки интегралов, теоремы о среднем.

№№ 2316(а), 2317(а, в), 2318(а), 2319, 2321 {2321.1}, 2323, 2324, 2326.1(а) {2326(а)}, 2326.2(а) {2326.1(а)}, 2328, 2333.

Домашнее задание: №№ 2316(б, в), 2317(б), 2318(г), 2322, 2326.1(б) {2326(б)}, 2326.2(б) {2326.1(б)}, 2330, 2332.

Дополнительно: №№ 1, 2 (см. список дополнительных задач для 2-го семестра).

9 занятие. Несобственные интегралы.

№№ 2334, 2346, 2354, 2357(а), 2358, 2363, 2366.

Домашнее задание: 2345, 2347, 2355, 2357(в, г), 2359, 2364, 2370(а) {2370}.

10 занятие. Несобственные интегралы (продолжение).

№№ 2369, 2370(б) {2370.1}, 2376(а) {2376}, 2377, 2374, 2361.

Домашнее задание: 2371, 2376(б) {2376.1}, 2368, 2372, 2375, 2373.

Дополнительно: №№ 3, 4, 5, 6, 7, 8.

11 занятие. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

№№ 2378, 2380(а, в) {2380, 2380.2}, 2381, 2390, 2393.

Домашнее задание: 2379, 2380(б) {2380.1}, 2383, 2384.1 {2384}, 2392, 2395.

Дополнительно: 9, 10, 11, 12, 13, 14.

12 занятие. Контрольная работа №1.

Несобственные интегралы.

13 занятие. Коллоквиум.

Исследование функций. Определённый интеграл.

14 занятие. Применение определённого интеграла к вычислению площадей плоских фигур.

№№ 2397, 2403, 2413, 2418, 2424, 2426.

Домашнее задание: 2399, 2402, 2410, 2415, 2422(а) {2422}, 2425(а, б) {2424.1, 2424.2}.

15 занятие. Применение определённого интеграла к вычислению длин дуг кривых.

№№ 2432, 2435, 2440, 2443, 2446, 2452(a) {2452}.

Выдача КДЗ №2.

Домашнее задание: 2436, 2438, 2442, 2448, 2450, 2452(б) {2452.1}.

16 занятие. Применение определённого интеграла к вычислению объёмов и площадей поверхностей.

№№ 2461, 2462, 2471, 2473, 2480, 2482.2 {2482}, 2486, 2492.

Домашнее задание: № 2463, 2465, 2472, 2479, 2482.1 {2481.1}, 2489, 2495, 2497.

17 занятие. Приближённые методы вычисления определённых интегралов. Методы хорд и касательных приближённого отыскания корней уравнений (возможно, вынести на самостоятельную работу).
№№ 1621, 1627, 2532, 2535, 2543.

Прием КДЗ №2.

Домашнее задание: 1620, 1624, 1626, 2533, 2540.

Тема 3. Функции нескольких переменных.

18 занятие. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

№№ 3137, 3166, 3172, 3180, 3182, 3183.1 {3183}, 3185, 3188, 3195.

Домашнее задание: 3168, 3174, 3179, 3181, 3183(2,3){3183.1,2}, 3187, 3190, 3198, 3205, 3206, 3207.

19 занятие. Частные производные и дифференциал функции нескольких переменных.

№№ 3211.2{3212}, 3212(1){3212.1}, 3213, 3217, 3237, 3251, 3252, 3254.

Домашнее задание: 3212(3){3212.3}, 3219, 3224, 3239, 3241, 3253, 3255.

Дополнительно: №№ 15, 16, 17.

20 занятие. Дифференцируемость сложной функции. Производные и дифференциалы высших порядков.

№№ 3230(1){3230}, 3257, 3262, 3269, 3273, 3284, 3297, 3295, 3305, 3309.

Домашнее задание: 3228, 3230(2){3230.1}, 3260, 3263, 3270, 3277, 3283, 3285, 3298, 3301, 3307.

Дополнительно: №№ 18, 19, 20, 21.

21 занятие. Контрольная работа №2.

Непрерывность и дифференцируемость функции нескольких переменных.

22 занятие. Формула Тейлора. Различные представления остаточного члена.

№№ 3581, 3585, 3587, 3593, 3601.

Домашнее задание: 3582, 3588, 3594, 3603.

Дополнительно: № 22 (а, б, в, г).

23 занятие. Равномерная непрерывность функции нескольких переменных.

№№ 23(а,б,в,г), 24, 25, 26.

Домашнее задание: 3203(2,3){3303.2, 3303.3}.

24 занятие. Дифференцирование неявных функций.

№№ 3365, 3371, 3390, 3395, 3398(2(а)){3399(а)}, 3402(а){3402}, 3426, 3402(б){3403}.

Домашнее задание: 3364, 3372, 3383, 3398(1){3398}, 3398.2(б){3399(б)}, 3401, 3427, 3408(б){3407.2}.

25 занятие. Производная по направлению. Градиент, его геометрические приложения.

№№ 3245(а), 3341, 3345, 3347, 3528, 3534, 3539, 3554.

Домашнее задание: 3244(б), 3342, 3344, 3529, 3533, 3538, 3540, 3555.

26 занятие. Контрольная работа №3.

Производные высших порядков функции нескольких переменных. Геометрические приложения производной. Неявные функции.

27 занятие. Замена переменных в дифференциальных выражениях.

№№ 3431, 3434, 3438, 3450, 3458, 3462, 3474.

Домашнее задание: №№ 3433, 3435, 3447, 3453, 3459, 3463, 3484.

28 занятие. Экстремум (безусловный) функции нескольких переменных.

№№ 3621, 3622, 3627(а){3627}, 3628, 3631, 3636, 3647.

Домашнее задание: 3623, 3624, 3627(б){3627.1}, 3639, 3642, 3643.

29 занятие. Условный экстремум функций нескольких переменных.

№№ 3651, 3656, 3660, 3668, 3661, 3663(а){3663}, 3676, 3678, 3679, 3688.

Домашнее задание: 3653, 3655, 3667, 3670, 3664, 3672, 3675, 3677, 3663(б){3663.1}, 3687, 3694.

30 занятие. Контрольная работа №4.

Замена переменных. Экстремумы функции нескольких переменных.

**СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ.
II СЕМЕСТР.**

1. Пусть $f(x) \in C([a; +\infty))$, то есть, непрерывна на указанном промежутке, и существует число $B > a$ такое, что при $x \geq B$ выполняется неравенство: $|f(x)| \leq C \cdot x^\alpha$ ($\alpha < 1$). Вычислить предел:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^{2A} f(x) \frac{dx}{1+x^2}.$$

2. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на полусегменте $(0; 1]$, и

$$|\varphi(x)| \leq Cx^\alpha. \text{ Вычислить предел: } \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_\delta^{2\delta} \varphi(x) \frac{dx}{1+x} \quad (\alpha > -1).$$

Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

$$\begin{aligned} 3. \quad & \int_0^1 \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^p} dx; & 4. \quad & \int_1^\infty \frac{x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}{x^p} dx; & 5. \quad & \int_0^1 \frac{(\sin x)e^x - x(1+x)}{x^p} dx; \\ 6. \quad & \int_0^1 x^p \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) dx; & 7. \quad & \int_0^1 \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^p} dx; & 8. \quad & \int_0^1 \frac{1 - (\cos x)^{\frac{x^2}{2}}}{x^p} dx; \end{aligned}$$

Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственные интегралы:

$$\begin{aligned} 9. \quad & \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx; & 10. \quad & \int_1^\infty \frac{x^p \sin(x^2)}{1+x^q} dx; & 11. \quad & \int_1^\infty \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x} \ln^p x} dx; \\ 12. \quad & \int_1^\infty \frac{\sin(\ln x)}{x \ln^2(\ln x)} dx; & 13. \quad & \int_1^\infty \frac{\sin x^4}{x^p} dx; & 14. \quad & \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x^2}}{x^q} dx. \end{aligned}$$

Исследовать на непрерывность по каждой переменной и по совокупности:

$$\begin{aligned} 15. \quad & \text{а) } f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x(x-y)}{x^2 + xy + y^2}}, f(0,0) = 0; \quad \text{б) } f(x, y) = \sqrt[4]{\frac{x^2(x^2 + y^2)}{x^4 + y^4}}, f(0,0) = 0; \\ 16. \quad & \text{а) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y^2 + \sin^2 x}, & \sin^2 x + y^2 \neq 0; \\ 0, & \sin^2 x + y^2 = 0 \end{cases}; \quad \text{б) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y^2 + \cos^2 x}, & \cos^2 x + y^2 \neq 0; \\ 0, & \cos^2 x + y^2 = 0 \end{cases}; \\ 17. \quad & \text{а) } f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} x, f(0;0) = 0; \quad \text{б) } f(x, y) = \sqrt{|xy|} \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}, f(0;0) = 0; \end{aligned}$$

Исследовать функцию на дифференцируемость:

$$18. \quad \text{а) } f(x, y) = \sqrt[3]{xy^2}; \quad \text{б) } f(x, y) = \sqrt[5]{x^6 y^6};$$

19. а) $f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 y^2}$; б) $f(x, y) = \sqrt[5]{x^6 y^7}$;

20. Следует ли из условия $\Delta f(0;0) = \bar{o}(\rho)$ дифференцируемость функции $u = f(x, y)$ в точке $(0;0)$?

21. Исследовать функцию $u = f(x, y)$ на дифференцируемость в точке $(0;0)$, предполагая, что $f(0;0) = 0$:

а) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^5} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; б) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^\lambda \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$;

в) $f(x, y) = \arctg \sqrt{x^4 + y^4} \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$; г)

$f(x, y) = \ln(1 + \sqrt[3]{x^5 + y^4}) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$;

22. Разложить по формуле Маклорена до членов 6-го порядка малости:

а) $f(x, y) = \ln(1 + x^2) \ln(1 + y^2)$; б) $f(x, y) = \arctg \frac{x^2 + y^2}{1 + xy}$;

в) $f(x, y) = \sqrt[3]{\cos(x^2 + y^2)}$; г) $f(x, y) = e^{x+y} \arctg(x^2 - y^2)$.

23. Исследовать функцию на равномерную непрерывность на множестве $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$:

а) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^\lambda \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$; б) $f(x, y) = \arctg \sqrt{x^2 + y^4} \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$;

в) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy} \ln(x^2 + y^2)$; г) $f(x, y) = \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{\sqrt[4]{x^4 + y^4}}$.

24. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области $D = \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2\}$, и существует предел $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = b$. Доказать, что тогда $f(x, y)$ равномерно непрерывна в указанной области.

25. Пусть $f(x, y)$ дифференцируема при $a^2 < x^2 + y^2$ и имеет ограниченные частные производные. Тогда эта функция равномерно непрерывна в указанной области.

26. Верно ли утверждение: если функция $f(x, y)$ дифференцируема в области $W = \{(x, y) \mid a^2 < x^2 + y^2\}$, и одна из частных производных не ограничена, то она не является равномерно непрерывной в этой области?

27. Исследовать функцию на равномерную непрерывность на множестве $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$:

а) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^\lambda \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$; б) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \arctg \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^4}}$;

в) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y^2} \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$.

СПИСОК ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.
II СЕМЕСТР.

1. Пусть $f(x) \in C[0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. Найти предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(nx) dx$.
2. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает при $x > 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Верно ли, что $\int_0^{\infty} \sin(f(x)) dx$ сходится? Приведите соответствующие примеры.
3. Пусть $f'(x)$ монотонна и $|f'(x)| \geq A$ на $[a, b]$. Доказать, что $\left| \int_a^b \sin(f(x)) dx \right| \leq \frac{2}{A}$.
4. Пусть $f(x)$ монотонна на интервале $(0, a)$ и существует интеграл $\int_0^a x^p f(x) dx$. Доказать, что тогда $\lim_{x \rightarrow +0} x^{p+1} f(x) = 0$.
5. Пусть $a(x) \in C^1[a, b]$, $b(x) \in C[a, b]$ и $\forall f(x) \in C^1[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$, выполнено $\int_a^b (a(x)f'(x) + b(x)f(x)) dx = 0$. Доказать, что $a'(x) = b(x)$.
6. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[0, 1]$ и $\int_0^1 f(x) dx > 0$. Доказать, что найдутся $0 \leq a < b \leq 1$ такие, что $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$.
7. Пусть $f(x) \in C[a, b]$. Доказать, что $\int_c^d |f(x+h) - f(x)| dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ для любого отрезка $[c, d] \in (a, b)$.
8. Доказать, что любая первообразная нечетной функции четна, а среди первообразных четной функции есть, и притом только одна, нечетная функция.
9. Пусть $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Доказать, что $f(x)$ интегрируема на $[-1, 1]$, а $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ дифференцируема на $(-1, 1)$. Найти $F'(0)$.

10. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и в точке $c \in (a, b)$ имеет неустранимый разрыв первого рода. Доказать, что $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ не дифференцируема в точке c .
11. Пусть $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$. Доказать, что
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{1/n} = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$
12. Сравнить числа $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx$ и $\frac{4\pi}{3}$. **Указание:** применить формулу Тейлора.
13. Сравнить числа $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ и 0.
14. Сравнить числа $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx$ и 0.
15. Пусть $f(x) \in C^1[0, 1]$ и $f(1) - f(0) = 1$. Доказать, что $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 1$.
16. Пусть $f(x)$ монотонно убывает на $[0, 1]$. Доказать, что для любого $a \in (0, 1)$ выполнено $\int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^1 f(x) dx$.
17. Привести пример функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$, каждая из которых является разрывной в точке $(0, 0)$, таких, что: а) их сумма непрерывна в точке $(0, 0)$; б) их произведение непрерывно в точке $(0, 0)$.
18. Привести пример функции $f(x, y)$, которая в любой окрестности точки $(0, 0)$ принимает любые значения из интервала $(-1, 1)$.
19. Пусть для функции $f(x, y)$ существуют $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = B$. Доказать, что $A = B$.
20. Привести пример функции $f(x, y)$, равномерно непрерывной на множестве $x \geq 0, y \geq 0$ и непрерывной, но не равномерно непрерывной на всей плоскости (x, y) .
21. Показать, что функция $f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{y}$ непрерывна в своей области определения E , но не является равномерно непрерывной на множестве $E \cap \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Какое условие теоремы Кантора здесь нарушено?
22. Пусть $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$. Показать, что: а) $f(x, y)$ является непрерывной в начале координат; б) $f(x, y)$ не является дифференцируемой в начале координат; в) для любых функций $x(t), y(t)$, определенных и непрерывно дифференцируемых на отрезке

$[-1, 1]$ и таких, что $x(0)=0, y(0)=0, x^2(t)+y^2(t)>0$ при $t \neq 0$, функция $F(t)=f(x(t), y(t))$ дифференцируема при любом $t \in [-1, 1]$ (в частности, при $t=0$).

23. Показать, что функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ имеет в точке

$(0, 0)$ производную по любому направлению, но не является непрерывной в этой точке.

24. Представить положительное число a в виде суммы пяти положительных слагаемых так, чтобы их произведение имело наибольшее значение.

25. Через точку $A(a, b, c)$, $a > 0, b > 0, c > 0$, провести плоскость, отсекающую от первого октанта ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) тетраэдр наименьшего объема.

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ (КДЗ) №1.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЁ ГРАФИКА. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ.

Вариант № 1.

В задачах №1, 2, 3 выполнить полное исследование функции и построить её график:

$$1) \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x} \cdot (x^2 - 3x + 2); \quad 2) \quad x = \frac{(t+1)^2}{4}, \quad y = \frac{(t-1)^2}{4}; \quad 3) \quad r = a + b \cos \varphi;$$

4) Найти прямоугольник наибольшей площади, вписанный в эллипс:
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Вариант № 2.

В задачах №1, 2, 3 выполнить полное исследование функции и построить её график:

$$1) \quad x = \frac{t^2}{1-t^2}; \quad 2) \quad y = \frac{1}{1+t^2}; \quad 3) \quad r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}.$$

4) Из всех круговых секторов с данным периметром, равным 2π , найти тот, у которого наибольшая площадь.

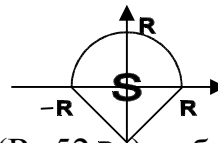
КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ (КДЗ) №2.

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА.

Вариант №1.

- 1) Найти длину дуги кривой: $L: \begin{cases} x = 2(sht - t) \\ y = 2(cht - 1) \end{cases}; t \in [0; T].$

- 2) Определить статические моменты и координаты центра тяжести фигуры:



- 3) В дне котла, имеющего форму полушара ($R=52\text{см}$), образовалась пробоина ($S=0,3\text{см.кв.}$). Через сколько времени вытечет вся вода, если скорость истечения $V = \mu\sqrt{2gh}$, $\mu = 0,6$, h – высота столба жидкости?

Вариант №2.

- 1) Найти длину дуги кривой: $K: y^3 = px^2, 0 < y < a.$
- 2) Найти центр тяжести дуги кривой: $l: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{2}{3}}, (x > 0, y > 0).$
- 3) Какую работу совершает газ, расширяясь в цилиндре от $p_1 = 10$ атм. до $p_2 = 1$ атм.? Первоначальный объём $V_1 = 100$ см. куб. Процесс адиабатический, то есть $pV^\gamma = \text{const}, \gamma = 1,4.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Вариант №1.

1. Исследовать на сходимость интеграл: $\int_0^\infty \frac{\ln^q(1+x^2)}{x^n} dx.$
2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость: $\int_0^\infty \frac{\sin x \cdot \arctg^p x}{1+x^q} dx.$

Вариант №2.

1. Исследовать на сходимость интеграл: $\int_0^\infty \frac{\arctg(1+x^q)}{x^n} dx.$
2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость: $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^p) \sin x}{1+x^q} dx.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2.
**НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.**

Вариант №1.

1. Исследовать на непрерывность по каждой переменной и по совокупности:

$$f(x, y) = \frac{2y \sin x}{y^2 + \sin^2 x}; f(k\pi; 0) = f(0; 0) = 0.$$

2. Исследовать на дифференцируемость:

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^4) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}; f(0; 0) = 0.$$

3. Найти du, d^2u функции $u = f(\xi, \eta)$, если $\xi = \sin(x + y)$, $\eta = e^{xy}$.

Вариант №2.

1. Исследовать на непрерывность по каждой переменной и по совокупности:

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{|xy|}{x^2 + xy + y^2}}, f(0; 0) = 0.$$

2. Исследовать на дифференцируемость:

$$f(x, y) = \sqrt{(x^4 + y^2)^3} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}; f(0; 0) = 0.$$

3. Найти du, d^2u функции $u = f(\xi, \eta)$, если $\xi = e^{x+y}$, $\eta = \sin xy$.

Вариант №3.

1. Исследовать на непрерывность по каждой переменной и по совокупности:

$$f(x, y) = \frac{y \sin^2 x}{y^2 + \sin^4 x}; f(k\pi; 0) = f(0; 0) = 0.$$

2. Исследовать на дифференцируемость:

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^6 + y^6} \sin \frac{1}{x^4 + y^4}; f(0; 0) = 0.$$

3. Найти du, d^2u функции $u = f(\xi, \eta)$, если $\xi = \ln(x^2 + y^2)$, $\eta = xy$.

Вариант №4.

1. Исследовать на непрерывность по каждой переменной и по совокупности:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x(x+y)}{x^2 + xy + y^2}}, f(0; 0) = 0.$$

2. Исследовать на дифференцируемость:

$$f(x, y) = \arcsin \sqrt[3]{\frac{x^4 + y^4}{1 + x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}; f(0; 0) = 0.$$

3. Найти du, d^2u функции $u = f(\xi, \eta)$, если $\xi = \ln(1 + xy)$, $\eta = x^2 - y^2$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3.
ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ПРОИЗВОДНЫХ. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ.

Вариант №1.

1. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $F(u, v) = 0$, где $u = \sin(x + y + z)$, $v = x^2 + z^2$.
2. Разложить по формуле Маклорена до членов 4-го порядка малости функцию $u = f(x, y)$, если $u = \arcsin \frac{x^2 + y^4}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.
3. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в данной точке к следующей кривой: $y = x$, $z = x^2$ в точке $K(1, 1, 1)$.

Вариант №2.

1. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $F(u, v) = 0$, где $u = \ln(x + y + z)$, $v = e^{x-z}$.
2. Разложить по формуле Маклорена до членов 4-го порядка малости функцию $u = f(x, y)$, если $u = \arctg \frac{x^2 + y^4}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.
3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали в точке M_0 к следующей поверхности: $z = y + \ln \frac{x}{z}$; $M_0(1; 1; 1)$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4.
ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Вариант №1

1. Произвести замену переменных в следующем дифференциальном выражении:

$$w = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad \text{при} \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

2. Найти **условный экстремум** функции: $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии:
 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{8}$.
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:
 $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4$ в области $D: \{y = x + 1; y = 0; x - 3 = 0\}$.

Вариант №2

1. Произвести замену переменных в следующем дифференциальном выражении: $w = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ при $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.
2. Найти **условный экстремум** функции: $z = xy$ при условии: $x^2 + y^2 = 2$.
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:
 $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$ в области $D: \{x + y + 2 = 0; x = 0; y = 0\}$.

Вариант №3

1. Произвести замену переменных в следующем дифференциальном выражении: $w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ при $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.
2. Найти **условный экстремум** функции: $z = 2x + y$ при условии:
 $x^2 + y^2 = 1$.
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:
 $z = x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x - 1$ в области $D: \{x = 0; y = 0; x + y = 3\}$.

Вариант №4

1. Произвести замену переменных в следующем дифференциальном выражении: $w = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ при $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.
2. Найти **условный экстремум** функции: $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y - 4)$ при условии:
 $x^2 + y^2 = 1$.
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:
 $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ в области $D: \{x = 0; y = 2x; y = 2\}$.

ЗАЧЁТНАЯ РАБОТА.
II СЕМЕСТР ^{*)}

Вариант № 1.

1. Найти длину дуги кривой: $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$;
2. Вычислить площадь $D: y^2 = \frac{x^3}{2a-x}, \quad x = 2a$;
3. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{\ln^p x}{\sqrt{x}(1-x^2)} dx$;
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость: $\int_0^\infty x^p \sin(x^5) dx$;
5. Исследовать на непрерывность по каждому аргументу и по совокупности:
$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, \quad f(0; 0) = 0;$$
6. Исследовать на дифференцируемость:
$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \text{ при } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ и } f(0; 0) = 0;$$
7. Найти дифференциалы du, d^2u для функции $u = f(z)$, если $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
8. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ неявной функции $z = z(x, y)$, если $F(u, v) = 0$, где
 $u = x + y + z, v = x \cdot y + z$;
9. Перейти к новым переменным u, v, w , где $w = w(u, v)$, в уравнении:
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1 + \frac{y}{x}) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $u = x, v = x + y, w = x + y + z$;
10. Исследовать на равномерную непрерывность в области $Q: x^2 + y^2 \geq 1$ функцию: $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x^4 + y^4}}$;
11. Разложить по формуле Маклорена до членов 6-го порядка малости:
 $f(x, y) = \sqrt[3]{1 + \sin(x^2 + y^2)}$;

^{*)} По усмотрению преподавателя, рекомендуется вставить в варианты зачётной работы несколько формулировок и определений из предлагаемого списка.

12. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $u = z^2 - 3xy + y^2$ в области $S: x^2 + y^2 \leq 10$.

Вариант № 2.

1. Найти длину дуги кривой: $r = 1 + \cos \frac{\varphi}{2}$;
2. Вычислить площадь $D: r = a(1 + \cos \varphi)$
3. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{\cos \sqrt{x} - e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt[3]{\ln x} \cdot x^p} dx$;
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость: $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x) \sin(x^2)}{\sqrt{x^3} (1+x^p)} dx$;
5. Исследовать на непрерывность по каждому аргументу и по совокупности: $f(x, y) = xy \frac{\sin x + \sin y}{x + y}$, $f(0; 0) = 0$;
6. Исследовать на дифференцируемость: $f(x, y) = \sqrt[3]{x^4 + y^4}$
7. Найти дифференциалы du, d^2u для функции $u = f(z)$, если $z = \sin(x^2 - y^2)$;
8. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ неявной функции $z = z(x, y)$, если $F(u, v) = 0$, где $v = x - y + z$, $u = x \cdot y - z$;
9. Перейти к новым переменным u, v, w , где $w = w(u, v)$, в уравнении: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z$, если $w = ze^y$, $v = \frac{x-y}{2}$, $u = \frac{x+y}{2}$;
10. Исследовать на равномерную непрерывность в области $Q: x^2 + y^2 \geq 1$ функцию: $f(x, y) = \sqrt[3]{xy} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$;
11. Разложить по формуле Маклорена до членов 6-го порядка малости: $f(x, y) = e^{2x-y} \arctg(x^2 + y^2)$;
12. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $u = x + y + z$ в области $S: x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

СПИСОК ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ФОРМУЛИРОВОК ТЕОРЕМ. II СЕМЕСТР.

1. Определение разбиения сегмента, измельчения и объединения разбиений.
2. Определение интегральной суммы, нижней и верхней сумм.
3. Определение предела интегральных сумм.

4. Определение интегрируемости функции по Риману.
5. Необходимое условие интегрируемости.
6. Соотношения между интегральной суммой и нижней и верхней суммами.
7. Выражение верхней и нижней сумм через интегральные суммы
8. Понятие верхнего и нижнего интегралов Дарбу.
9. Оценка изменения верхней (нижней) суммы при добавлении к разбиению l новых точек.
10. Определение предела верхних (нижних) сумм при стремлении диаметра разбиений к нулю.
11. Основная лемма Дарбу.
12. Критерий интегрируемости функции (через интегралы Дарбу).
13. Критерий интегрируемости функции (через верхние и нижние суммы).
14. Основные классы интегрируемых функций.
15. Условия интегрируемости сложной функции.
16. Основные свойства интегралов.
17. Основные оценки интегралов.
18. Первая теорема о среднем значении интеграла.
19. Вторая теорема о среднем значении интеграла.
20. Теоремы о свойствах интеграла с переменным верхним пределом.
21. Основная теорема интегрального исчисления (Лейбниц).
22. Теорема о замене переменной в интеграле.
23. Теорема об интегрировании по частям.
24. Определение несобственного интеграла первого рода.
25. Определение несобственного интеграла второго рода.
26. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла первого рода.
27. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла второго рода.
28. Общий признак сравнения несобственных интегралов первого рода.
29. Частный признак сравнения несобственных интегралов первого рода.
30. Определение условной сходимости несобственного интеграла первого рода.
31. Теорема Дирихле-Абеля сходимости несобственного интеграла первого рода.
32. Теорема о замене переменной в несобственном интеграле.
33. Теорема об интегрировании по частям в несобственном интеграле.
34. Определение простой кривой, параметризуемой кривой.
35. Определение спрямляемой кривой.

36. Теорема о длине дуги параметризуемой кривой.
37. Понятие площади плоской фигуры.
38. Критерии квадратуемости плоской фигуры.
39. Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора.
40. Определение объема тела в пространстве.
41. Классы кубируемых тел.
42. Формула прямоугольников (трапеций) приближенного вычисления интегралов и оценка погрешности.
43. Теорема Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в интегральной форме.
44. Определение по Коши предела функции многих переменных в точке.
45. Определение по Гейне предела функции многих переменных в точке
46. Критерий Коши существования предела функции многих переменных в точке.
47. Определение сходящейся последовательности точек в пространстве $\mathbf{R}^m$.
48. Понятий фундаментальной последовательности точек в пространстве $\mathbf{R}^m$.
49. Критерий Коши сходимости последовательности точек в пространстве $\mathbf{R}^m$.
50. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
51. Определение непрерывности функции многих переменных в точке $a = (a_1, \dots, a_m)$.
52. Арифметические свойства функций, непрерывных в точке $a = (a_1, \dots, a_m)$.
53. Теорема о непрерывности сложной функции многих переменных.
54. Теорема о прохождении непрерывной функции многих переменных через промежуточное значение.
55. Теорема о сохранении знака непрерывной функции многих переменных в окрестности точки $a = (a_1, \dots, a_m)$.
56. Первая теорема Вейерштрасса для функции многих переменных.
57. Вторая теорема Вейерштрасса для функции многих переменных.
58. Определение равномерной непрерывности функции многих переменных.
59. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции многих переменных.
60. Определение частной производной функции в точке $a = (a_1, \dots, a_m)$.
61. Определение дифференцируемости функции в точке $a = (a_1, \dots, a_m)$.
62. Необходимое условие дифференцируемости функции многих переменных.
63. Достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных.

64. Определение дифференциала функции многих переменных.
65. Определение частной производной высокого порядка.
66. Теоремы о достаточных условиях независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.
67. Определение дифференциала второго порядка функции многих переменных.
68. Определение производной по направлению функции многих переменных.
69. Градиент функции многих переменных
70. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции многих переменных.
71. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции многих переменных.
72. Определение локального экстремума функции многих переменных.
73. Достаточные условия экстремума функции многих переменных.
74. Теорема о существовании, непрерывности и дифференцируемости функции многих переменных, заданной одним уравнением.
75. Теорема о разрешимости системы уравнений неявно заданных функций.
76. Определение зависимости и независимости функций. Достаточные условия независимости.
77. Теорема о функциональных матрицах.
78. Понятие условного экстремума функции при наличии связей.

Необходимо уметь строить отрицания к определениям.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ.

II СЕМЕСТР.

1. Отыскание точек локального экстремума функции одной переменной.
Достаточные условия экстремума.
2. Направление выпуклости графика функции и точки перегиба.
Достаточные условия перегиба.
3. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования графика функции.
4. Понятие интегрируемости функции. Леммы Дарбу о верхних и нижних суммах.

5. Необходимое и достаточное условие интегрируемости.
6. Классы интегрируемых функций.
7. Основные свойства определенного интеграла. Оценки интегралов. Формулы среднего значения.
8. Основная формула интегрального исчисления. Формулы замены переменного и интегрирования по частям.
9. Понятие длины плоской кривой. Формулы для вычисления длины дуги кривой.
10. Понятие квадратуемости (площади) плоской фигуры. Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора.
11. Понятие кубичности (объем тела). Кубичность некоторых классов тел.
12. Абсолютная сходимость несобственных интегралов. Формулы замены переменного и интегрирования по частям для несобственных интегралов.
13. Признак Абеля-Дирихле. Главное значение несобственного интеграла.
14. Метод хорд и его обоснование.
15. Метод касательных и его обоснование.
16. Приближенные методы вычисления определенных интегралов (для одного из методов вывести оценку погрешности)
17. Различные множества точек и последовательности точек n -мерного пространства. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
18. Понятие функции n переменных и ее предельного значения.
19. Непрерывность функции n переменных. Основные теоремы о непрерывных функциях.
20. Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных. Достаточное условие дифференцируемости. Касательная плоскость к поверхности.
21. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Инвариантность формы первого дифференциала.
22. Производная по направлению. Градиент.
23. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о равенстве смешанных производных.
24. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
25. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
26. Локальный экстремум функции нескольких переменных и его отыскание.

27. Теорема о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции.
 28. Теорема о разрешимости системы функциональных уравнений.
 29. Понятие зависимости функций. Функциональные матрицы и их роль при исследовании зависимости функций.
 30. Условный экстремум и методы его отыскания.
-

ЛИТЕРАТУРА.

УЧЕБНИКИ:

1. В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Математический анализ. Часть 1 \ \ Изд-во «Проспект», Изд-во МГУ, Москва, 2004.
2. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть 1 \ \ Физматлит, Москва, 1982 .
3. В. А. Ильин, А. В. Куркина. Высшая математика \ \ Изд-во «Проспект», Изд-во МГУ, Москва, 2004.
4. И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко. Математический анализ. Функции многих переменных: теория и задачи \ \ учебно-методическое пособие, МАКС Пресс, Москва, 2008.
5. И. В. Садовничая, Е. В. Хорошилова. Определенный интеграл: теория и практика вычислений \ \ учебно-методическое пособие, МАКС Пресс, Москва, 2008.
6. В. Н. Денисов, В. В. Тихомиров. Математический анализ. Выпуски 1-4 \ \ учебно-методическое пособие, МАКС Пресс, Москва, 2004-2005.

ЗАДАЧНИКИ:

7. Б. П. Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу. АСТ, Астрель, Москва, 2004.
8. И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Задачи и упражнения по математическому анализу \ \ Изд-во МГУ, Москва, 1988.